
TD 8 — Vocabulaire des applications

Images directes

Exercice 1 — De nos fonctions préférées

Déterminer les images directes suivantes.

1. $\ln(\mathbb{R}_+^*)$
2. $\ln([1; e])$
3. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$

Exercice 2 — Une jolie racine

Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in D$, admet-elle des solutions ?
3. En déduire l'image de la fonction f .

Exercice 3 — Intersection, union et image directe

Soient E et F deux ensembles et soit $f: E \rightarrow F$ une application.

Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
3. Trouver un cas où il n'y a pas égalité dans la relation précédente.
4. A-t-on $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$?

Exercice 4 — Fonctions indicatrices

Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E , on appelle **fonction indicatrice de A** l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A: E &\longrightarrow \{0; 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que $A = B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.
4. Montrer que $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
5. Calculer $\mathbb{1}_{A \setminus B}$.
6. Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Posons $g = \mathbb{1}_A f$.
Déterminer l'image de l'application g .

Bijektivité

Exercice 5 — Une homographie

Considérons l'application suivante :

$$f: x \mapsto \frac{x+2}{x-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Soit y un réel. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$.
3. (a) Déterminer l'image de l'application f .
(b) Montrer que l'application f réalise une bijection de D sur son image et donner sa réciproque.

Exercice 6 — Une homographie involutive !

Soit l'application suivante :

$$f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f .
2. Montrer que l'application f est bijective de D sur D et que $f^{-1} = f$.

Exercice 7 — Il suffira d'un signe

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |3x-1| + 4. \end{aligned}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction bijective de f et déterminer sa réciproque.

Exercice 8 — Systèmes linéaires en avant-première

1. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x+y, x-y). \end{aligned}$$

- (a) Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les antécédents de (a, b) par l'application f .
 - (b) En déduire que l'application f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa réciproque.
2. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x+z, y+z, x+3y+4z). \end{aligned}$$

- (a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les antécédents de (a, b, c) par l'application g .
- (b) En déduire l'image de l'application g .
- (c) L'application g est-elle injective ? surjective ?

Autour de la composition

Exercice 9 — Composée de fonctions injectives/surjectives

Soient E , F et G trois ensembles. Soient $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Les réciproques de ces deux implications sont-elles vraies ?

Exercice 10 — Surjective à l'extérieur, injective à l'intérieur

Soient E , F et G trois ensembles non vides et $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 11 — L'autre, en un mot

Soient E , F et G trois ensembles non vides et $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications. Établir les propositions suivantes.

1. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 12 — Décalage

Soient les applications suivantes :

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto n + 1 \quad \text{et} \quad n \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $g \circ f$.
2. La fonction f est-elle bijective ?